CONCOURS SPECIAL D'ENTREE AUX GRANDES ECOLES SCIENTIFIQUES

1985

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul et de dessin est autorisé.

Dans tout le problème on désigne par $\mathfrak{P}$ un plan affine euclidien orienté et par $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal direct de $\mathfrak{P}$.

Les parties I, II et III sont largement indépendantes.

I. Résolution d'un système différentiel

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{C}^4$ dont la matrice dans la base canonique B est :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Déterminer les valeurs propres de f et prouver que f est diagonalisable.

b. Expliciter une base de vecteurs propres de f (ces vecteurs seront donnés par leurs composantes dans la base B).

2. Déterminer l'unique solution du système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\theta} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{d\theta} = 3x_1 - 4x_4 \\ \dfrac{dx_3}{d\theta} = x_4 \\ \dfrac{dx_4}{d\theta} = 4x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$x_1(0) = 1\,, \qquad x_2(0) = -6\,, \qquad x_3(0) = 2\,, \qquad x_4(0) = 1\,.$$

II. Étude géométrique et cinématique

Soit λ un nombre réel strictement positif.

On se propose d'étudier quelques aspects de la famille des courbes Γ_λ définies par la représentation paramétrique

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = (\cos\theta - \lambda \sin 3\theta)\,\vec{i} + (\sin\theta + \lambda \cos 3\theta)\,\vec{j}. \tag{1}$$

1. *Question préliminaire.*

Étant donnée une courbe Γ définie par une représentation paramétrique :

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = x(\theta)\,\vec{i} + y(\theta)\,\vec{j}. \tag{2}$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$, on dit que Γ est régulière à l'ordre 2 si en tout point

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} \right\| \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} \wedge \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2} \right\| \neq 0.$$

Dans ces conditions on note s l'abscisse curviligne, $(\vec{T}, \vec{N})$ le repère de Frenet et α une mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{T})$. Soit alors $z = x + iy$ l'affixe du point M et Z l'affixe du centre de courbure C. Démontrer que

$$Z = z + i\frac{dz}{d\alpha}.$$

2. *Étude géométrique de* Γ_λ.

a. Étudier la périodicité. Montrer que Γ_λ admet deux axes de symétrie. En déduire que, pour étudier Γ_λ, on peut se limiter au cas où $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$. Sur cet intervalle les conditions de la question II.1. sont-elles satisfaites?

b. On se place dans le cas où $\lambda = 1/3$.
Construire la courbe $\Gamma_{1/3}$ (unité graphique 6 cm). Calculer α en fonction de θ et déterminer la développée de $\Gamma_{1/3}$ (aux points $\theta = \pi/4$ et $\theta = -\pi/4$ on prolongera Z par continuité).
Montrer que cette développée se déduit de la courbe initiale par une similitude directe que l'on précisera.

c. Construire la courbe Γ_λ lorsque $\lambda = 2$ (unité graphique 3 cm).

d. Soit $(\vec{I}, \vec{J})$ la base déduite de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ par la rotation d'angle $3\pi/4$.
Déterminer les coordonnées X et Y du point M(θ) dans le repère $(O; \vec{I}, \vec{J})$ en fonction de $\varphi = \theta - 3\pi/4$.

3. *Étude cinématique de* Γ_λ.

On se propose d'interpréter Γ_λ comme la trajectoire d'un mouvement ponctuel admettant une génération simple. A cet effet on considère le point mobile S défini par la relation :

$$\overrightarrow{OS}(t) = \cos t\,\vec{I} + \sin t\,\vec{J},$$

ainsi que le vecteur mobile $\vec{u}$ défini par la relation

$$\vec{u}(t) = \cos 3t\,\vec{I} + \sin 3t\,\vec{J}$$

et le vecteur $\vec{v}$ du plan $\mathcal{P}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormale directe.

On introduit enfin le mouvement du repère mobile $(S; \vec{u}, \vec{v})$ par rapport au repère fixe $(O; \vec{I}, \vec{J})$ et le point mobile P défini par la relation

$$\overrightarrow{OP}(t) = X(t)\,\vec{I} + Y(t)\,\vec{J},$$

où X et Y sont les fonctions définies en II.2.*d* (ce qui revient à prendre la loi horaire $\varphi(t) = t$ sur la courbe Γ_λ).

a. Prouver que P est lié au repère $(S; \vec{u}, \vec{v})$.

b. Déterminer le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$ ainsi que le centre instantané de rotation G.

c. Quelle est la courbe décrite par G dans le plan fixe $(O; \vec{I}, \vec{J})$?

d. Quelle est la courbe décrite par G dans le plan mobile $(S; \vec{u}, \vec{v})$?

III. Étude dynamique

Dans cette partie on étudie le mouvement d'un point mobile P défini par les relations

(3) $\overrightarrow{OP}(t) = (\cos\varphi(t) + 2\cos 3\varphi(t))\ \vec{I} + (\sin\varphi(t) + 2\sin 3\varphi(t))\ \vec{J}$;

(4) $\dfrac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2} \cdot \vec{T} = \gamma\, \vec{I}.\vec{T}$, où γ est une constante strictement positive;

(5) $\varphi(0) = a$; $\varphi'(0) = b$, où a et b sont des nombres réels donnés.

(Ce mouvement est celui d'un point P de masse m astreint à se déplacer sans frottement sur la courbe Γ_2 et soumis à la force $\vec{F} = m\gamma\vec{I}$; un tel mouvement est défini par sa loi horaire $t \longrightarrow \varphi(t)$. L'équation différentielle (4) est obtenue en projetant sur la tangente l'équation fondamentale de la dynamique

$$\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{R}, \text{ où } \vec{R} \text{ est la réaction, qui est normale à } \Gamma_2).$$

1. *Description du mouvement.*

a. Écrire l'équation différentielle du second ordre (6) satisfaite par la fonction φ.
On admettra qu'il existe une solution φ et une seule de (6) satisfaisant aux conditions initiales (5).

b. Montrer que

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \right\|^2 = 2\gamma\overrightarrow{OP} \cdot \vec{I} + h$$

où h est une constante.
En déduire que la solution φ de (6) satisfaisant aux conditions initiales (5) est aussi solution d'une équation différentielle du premier ordre de la forme

(7) $$g(\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + U(\varphi) = g(a)\,b^2 + U(a),$$

où

$$U(\varphi) = -\gamma(\cos\varphi + 2\cos 3\varphi)$$

et où g est une fonction que l'on déterminera.

c. Étudier les variations de la fonction U et construire son graphe.

d. Déterminer les fonctions constantes solutions de (6) (on obtient de cette façon les positions d'équilibre pour le point P).
Que représentent les valeurs ainsi déterminées pour la fonction U ?

2. *Stabilité de la position d'équilibre* $\varphi = 0$.

Montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que les relations

$$|a| \leqslant \delta \qquad \text{et} \qquad |b| \leqslant \delta$$

impliquent que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$|\varphi(t)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |\varphi'(t)| \leqslant \varepsilon.$$

(On dit alors que la position d'équilibre $\varphi = 0$ est stable).

On pourra commencer par montrer que, pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que les relations $|a| \leqslant \delta_1$ et $|b| \leqslant \delta_1$ impliquent que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$U(\varphi(t)) \leqslant U(0) + \varepsilon_1.$$